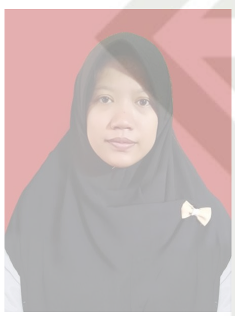
TRACE MATRIKS KETETANGGAAN n×n PADA GRAF RODA BERPANGKAT TIGA

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh :



UIN SUSKA RIAU

NURJANNAH SRIHARTINI
11454202480
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS
ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2021

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS KETETANGGAAN $n \times n$ PADA GRAF RODA BERPANGKAT TIGA

TUGAS AKHIR

Oleh:

NURJANNAH SRIHARTINI
11454202480

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir di Pekanbaru, 4 Februari 2021

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	Fitri Aryani, S.Si, M.Sc.
NIP. 19811225 200604 2 003	NIP. 19770913 200604 2 002

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS KETETANGGAAN $n \times n$ PADA RODA BERPANGKAT TIGA

TUGAS AKHIR

oleh:

NURJANNAH SRIHARTINI

11454202480

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 4 Februari 2021

Pekanbaru, 4 Februari 2021

Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag	Ari Pani Desvina, M.Sc
NIP. 19660604 199203 1 004	NIP.19811225 200604 2 003

DEWAN PENGUJI

Ketua : Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.

Sekretaris : Fitri Aryani, M.Sc.

Anggota I : Corry Corazon Marzuki, M.Si.

Anggota II : Zukrianto, M.Si.

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal peminjaman.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 04 Februari 2021
Yang membuat pernyataan,

NURJANNAH SRIHARTINI
11454202480

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur tak henti-hentinya kepada Allah SWT, atas nikmat, karunia dan rahmat–Nya sehingga saya dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

ꝏꝏꝏ

Ucapan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua ku yang telah membesarkan dan mendidik jiwa raga ini dengan penuh kasih sayang yang tulus. Doa dan harapan yang beliau berikan selalu mengiringi langkah perjalanan hidup ku untuk menjadi sosok yang diinginkannya.

ꝏꝏꝏ

Ucapan terimakasih untuk kakak dan adik-adik ku yang telah mendukungku, memotivasi setiap langkah ku hingga aku mampu melewati hari sulitku dan menemani ku dalam suka maupun duka.

ꝏꝏꝏ

Dengan penuh haru dan segala kerendahan hati Kupersembahkan gelar sarjana ku buat Ibunda dan Ayahku Tercinta Yang telah memberikan cinta kasih, perjuangan dan doa yang tiada henti.

ꝏꝏꝏ

Allah selalu memberikan hal-hal yang kita butuhkandalam hidup dengan cara-Nya. Memohonlah kepada-Nya dengan keyakinan dan ketulusan. Serta syukurilah apa yang telah kita miliki saat sekarang ini.

TRACE MATRIKS KETETANGGAAN n×n PADA GRAF RODA BERPANGKAT TIGA

NURJANNAH SRIHARTINI
11454202480

Tanggal Sidang : 04 Februari 2021
Tanggal Wisuda: 2021

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas mengenai *trace* matriks ketetanggaan n×n pada graf roda berpangkat tiga. Untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks tersebut, terlebih dahulu ditentukan bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan A_n^3 dan kemudian diperoleh bentuk umum $tr(A_n^3)$ dengan menggunakan definisi *trace* matriks. Hasil yang diperoleh adalah didapatkannya bentuk umum perpangkatan matriks dan *trace* matriks dari graf roda. Aplikasi dari kedua bentuk umum tersebut diberikan dalam bentuk contoh.

Katakunci : *graf roda, matriks ketetanggaan, trace.*

TRACE *ADJACENCY* MATRIX $n\times n$ ON THREE-LEVEL WHEELGRAPH

NURJANNAH SRIHARTINI
11454202480

Date of Final Exam: 04 February 2021
Date of Graduation:2021

Mathematics Department
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final project discusses the trace sof the $n\times n$ *adjacency matrix on three -level wheel graph. To get the general form of the trace matrix, first determine the general form of the adjacency matrix* A_n^3 *and then the general form* $\mathrm{tr}(A_n^3)$ *is obtained by using the definition of trace matrix. The results obtained are the general form of the matrix power and the matrix trace from the wheel graph. The applications of these two general forms are given in the form of examples.*

Keywords: wheel graph, adjacency matrix, trace

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah- Nya lah penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya dengan judul "Trace Matriks Ketetanggaan n×n Pada Graf Roda Berpangkat Tiga". Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana. Shalawat dan salam kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang selalu memberikan syafa'atnya sehingga kita dapat merasakan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi seperti sekarang ini. Selanjutnya dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta, Ayahanda Mustafa Rohimin dan Ibunda Hasnah. Ibunda dan Ayahanda yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus melangkah serta materi yang tidak mungkin mampu terbalas, dan ucapan terimaksih kepada ibu pembimbing dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini yaitu ibu Fitri Aryani, S.Si, M.Sc yang sangat membantu dalam penulisan Tugas Akhir ini, saran dan kritikan beliau sangat memotivasi saya dalam dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan baik. Semoga Allah SWT selalu merahmati Ayahanda dan Ibunda serta bapak ibu Fitri Aryani, S.Si, M.Sc selaku pembimbing dalam penulisan Tugas Akhir ini, dan semoga Allah SWT senantiasa memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat, Amin. Ucapan terimakasih selanjutnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Suyitno, M.Ag, selaku Plt. Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif KasimRiau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif

Kasim Riau.

4. Ibu Fitri Aryani, S.Si, M.Sc, selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau sekaligus selaku pembimbing yang telah banyak meluangkan waktunya untuk membimbing penulis, memberikan nasehat-nasehat serta saran-saran yang membuat penulis semangat hingga skripsi ini mampu diselesaikan tepat pada waktunya.
5. Bapak Zukrianto, S.Pd, M.Si dan Ibu Corry Corazon Marzuki, S.Si, M.Si selaku Penguji yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga Tugas Akhir ini dapat selesai dengan lebih baik.
6. Bapak, Ibu Dosen dan Staf Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
7. Kakak penulis Leily Purnama Sari, S.Pd serta sepupu Endang, Arul, Anis, bibik, wawak, serta om dan ante yang selalu memberikan motivasi dan nasehat kepada penulis.
8. Teman-teman penulis khususnya Mastiana Siregar, S.Si, Nela Aprianti, S.Si, Novia Lisdiah, S.Si, Oriza Sandriani, S.Si, Putra Nanda, S.Si, Repi Trisna Winti, S.Si, Rysfan S.Si, Zulfi Aryanti, Rati Trisnowati, S.Si, Ricken Husnudzan Vitho, dan teman-teman kelas C jurusan Matematika, serta teman-teman satu angkatan Jurusan Matematika yang selalu memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.

Akhirnya dalam penyusunan dan penulisan Tugas Akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk menghindari kesalahan. Tetapi penulis hanyalah manusia dan manusia adalah tempat salah dan khilaf, sesuai dengan pepatah tak ada gading yang tak retak. Penulis mengharapkan kepada pembaca Tugas Akhir ini agar memberikan kritik dan saran. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat

Pekanbaru, 04 Februari 2021

Nurjannah Srihartini

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Anton dan Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Banyak hal yang dapat dihitung dari suatu matriks, seperti perkalian matriks, determinan, invers matriks, *trace* matriks dan sebagainya. Terdapat beberapa jenis matriks, diantaranya matriks *circulant,* matriks identitas, dan matriks ketetanggaan.

Pembahasan *trace* matriks berpangkat telah banyak dilakukan oleh peneliti- peneliti sebelumnya. Pahade dan Jha merupakan contoh peneliti yang melakukan penelitian mengenai *trace* matriks. Tahun 2015 mereka mengkaji mengenai *trace*

matriks berordo 2×2 dengan pangkat bilangan bulat positif. Pahade dan Jha menggunakan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\forall$ a,b,c,d $\in$ R. Bentuk umum *trace* matriks yang didapatkan yaitu:

Untuk n bilangan ganjil,

$$tr(A)^n = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](det(A))^r (tr(A))^{n-2r}$$

Dan untuk n bilangan genap,

$$tr(A)^n = \sum_{r=0}^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](det(A))^r (tr(A))^{n-2r},$$

Menurut Pahade dan Jha (2017), melakukan penelitian kembali mengenai *trace*. Penelitian yang dilakukan mengkaji *trace* matriks ketetanggaan berpangkat bilangan bulat positif dari graf lengkap dengan simpul. Matriks ketetanggaan dari graf lengkap yang didapatkan yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

Dari matriks ketetanggaan tersebut didapat 2 bentuk umum *trace* yaitu bilangan bulat positif genap dan bilangan bulat positif ganjil sebagai berikut:

Untuk bilangan positif genap yaitu:

$$tr\ A^k = \sum_{r=1}^{n/2} s(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r},$$

Untuk bilangan positif ganjil

$$tr\ A^k = \sum_{r=1}^{n-1/2} s(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r},$$

dengan (,) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$s(k,1) = 1, s\left(k, \frac{k}{2}\right) = 1, s\left(k, k - \frac{1}{2}\right) = \frac{k-1}{2},$$

dan

$$s(k,r) = s(k-1,r) + s(k-2,r-1)$$

Aryani dan Solihin (2017), melakukan penelitian mengenai bentuk umum *trace* matriks real berordo 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif. Matriks yang digunakan yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\forall$ a,b,c,d $\in$ R dengan A invers atau det(A) ≠ 0. Hasil yang didapatkan adalah *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif untuk genap dan n ganjil. Bentuk umum tersebut yaitu:

Untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} = \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[(n-(r+1))][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

Untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} = \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[(n-(r+1))][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

Menurut Aryani dan Yulianis (2018), juga melakukan penelitian mengenai *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif. Matriks yang digunakan sebagai berikut $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\ a,b \in R$. Aryani dan Yulianis menggunakan induksi matematika untuk membuktikan bentuk umum $(A)^{-n}$ dan pembuktian langsung untuk bentuk umum $tr(A)^{-n}$. Dari pembuktian langsung didapat bentuk umum $tr(A)^{-n}$ untuk n bilangan genap dan n bilangan ganjil sebagai berikut:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk n ganjil,} \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}} & \text{, untuk n genap.} \end{cases}$$

Berdasarkan hasil penelitian-penelitian yang telah ditemukan mengenai *trace* matriks berpangkat, maka penulis berkeinginan untuk mengembangkan penelitian Pahade dan Jha (2017). Penelitian yang akan dilakukan mengenai *trace* matriks ketetanggaan n×n pada graf roda berpangkat tiga. Dengan bentuk matriks ketetanggaannya adalah sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Sehingga Tugas Akhir ini diberi judul *"Trace* Matriks Ketetanggaan n×n Pada Graf Roda Berpangkat Tiga*"*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini adalah: Bagaimana bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan n×n pada graf roda berpangkat tiga.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, maka harus dilakukan batasan masalah agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat. Permasalahan penelitian ini dibatasi pada hal-hal sebagaiberikut:

1. Matriks yang digunakan dalam penelitian ini adalah matriks ketetanggaan pada Persamaan (1.2) berordo n×n, dengan n ≥ 8,
2. Metode pembuktian yang digunakan adalah pembuktian langsung.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian Tugas Akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum

trace matriks ketetanggan n×n pada graf roda berpangkat tiga.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan, maka manfaat yang dapat di ambil adalah sebagai berikut:

1. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika mengenai matriks.
2. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi matriks yang tentunya akan sangat memberikan konstribusi untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan *trace* dari perpangkatan matriks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam Tugas Akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan graf, matriks ketetanggaan, operasi matriks, dan *trace* matriks.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini berisikan langkah-langkah atau prosedur dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan n×n pada graf roda berpangkat tiga.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisikan penjelasan bagaimana mendapatkan bentuk umum *trace*

matriks ketetanggaan n×n pada graf roda berpangkat tiga.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisikan kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dilakukan pada bab IV dan saran dari penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks, graf, matriks ketetanggaan, perkalian matriks, *trace* matriks, *trace* matriks ketetanggaan.

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks (*matrix)* adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Berdasarkan ukuran dan elemennya terdapat beberapa jenis matriks yaitu sebagai berikut:

1. Matriks Bujursangkar

Definisi 2.2 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks dengan jumlah baris dan jumlah kolom disebut matriks bujursangkar ordo (*square matrix of order*), dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ pada Persamaan (2.1) merupakan diagonal utama dari matriks .

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Contoh 2.1:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujursangkar 3×3

2. Matriks Diagonal

Definisi 2.3 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal.

Contoh 2.2:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal 3×3

3. Matriks Segitiga

Definisi 2.4 (Anton dan Rorres, 2004) Matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utama adalah nol disebut matriks segitiga atas *(upper triangular)* dan matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utama adalah nol disebut matriks segitiga bawah *(lower triangular)*. Suatu matriks, baik segitiga atas maupun segitiga bawah disebut matriks segitiga *(triangular)*.

Contoh :

a. Matriks Segitiga Atas

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ adalah matriks segitiga atas 3×3

b. Matriks Segitiga Bawah

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ adalah matriks segitiga bawah 3×3

4. Matriks Nol

Definisi 2.5 (Anton dan Rorres, 2004) Sebuah matriks yang seluruh entrinya adalah nol disebut dengan matriks nol (*zeromatrix*).

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks nol 3×3

5. Matriks Identitas

Matriks bujursangkar dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada entri-entri lainnya,seperti

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ dan seterusnya.

Matriks dengan bentuk seperti ini disebut matriks identitas dan dinyatakan dengan I.

6. Matriks Simetris

Definisi 2.7 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks bujursangkar A adalah simetrik (*symmetric)* jika $A = A^T$.

Teorema 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A dan B adalah matriks-matriks simetris dengan ukuran yang sama, dan jika k adalah skalar sebarang, maka:

a. A^T adalah simetrik

b. A + B dan A - B adalah simetrik.

c. kA adalah simetrik.

Contoh 2.5:

$A = \begin{bmatrix}1&4&5\\4&-3&0\\5&0&7\end{bmatrix}$ adalah matriks simetris 3 x 3

2.1 Graf

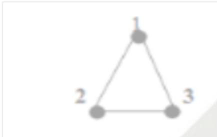
Definisi 2.8 (Munir, 2005) Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), ditulis dengan notasi G = (V,E) yang dalam ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Graf bisa direpresentasikan dalam beberapa bentuk matriks salah satunya matriks ketetanggaan, dimana matriks ini berukuran n×n.

Berikut beberapa jenis-jenis graf menurut Munir (2005) yaitu:

1. Graf Lengkap

Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya terhubung (oleh satu sisi) ke semua simpul lainnya. Dengan kata lain, setiap simpulnya bertetangga.

Contoh 2.6 Tentukan himpunan simpul V dan himpunan sisi E pada graf dibawah ini:



Gambar 2.1 Graf Lengkap K_4

Penyelesaian:

V = {1,2,3}

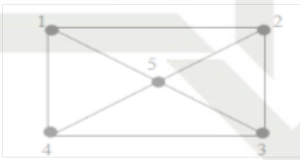
G = {(1,2),(1,3),(2,3)}

2. Graf Roda

Graf roda adalah graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran C_n, dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut.

Contoh 2.8:

Diberikan graf roda sederhana dengan V = {1,2,3,4,5} dan E = {(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(4,1),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)}. Maka bentuk grafnya adalah:



Gambar 2.2 Graf Roda W_4

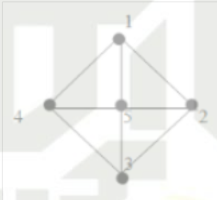
Definisi 2.9 (Rosen, 2007) Misalkan G = (V,E) adalah graf sederhana dimana |V| = n. Misalkan simpul dari G tersusun secara acak yaitu $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Matriks ketetanggaan A (atau A_G) dari G adalah matriks n×n nol-satu dimana 1 dimiliki oleh entri ke- (i,j) ketika v_i dan v_j adalah bertetangga, dan 0 dimiliki oleh entri ke-(i,j) ketika v_i dan v_j adalah tidak bertetangga.

Dengan kata lain, jika matriks ketetanggaan $A = [a_{ij}]$, maka

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } \{v_i, v_j\} \text{ bertetangga di } G \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Matriks ketetanggaan dinamakan juga matriks nol-satu karena pada matriks tersebut hanya berisi dari nol dan satu. Selain angka 0 dan 1 elemen matriks juga dapat dinyatakan dengan nilai false (menyatakan 0) dan true (menyatakan 1).

Contoh 2.9: Tentukan matriks ketetanggan dari graf roda berikut!



Gambar 2.3 Graf Roda W_4

Penyelesaian:

Diketahui bahwa simpul 1 bertetangga dengan simpul 2, simpul 2 dan simpul 3, simpul 3 dan simpul 4, simpul 4 dan simpul 5, simpul 5 dan simpul 1, simpul 5 dan simpul 2, simpul 5 dan simpul 3, simpul 5 dan simpul 4. Maka,

Matriks ketetanggaan dari graf diatas adalah

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2.10 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks m×r dan B adalah matriks r×n maka hasil kali (product) AB adalah matriks m×n yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, dipisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Contoh 2.10 Diberikan matriks: $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

Maka AB = $\begin{bmatrix} 9 & -14 & 41 \\ 2 & 2 & 4 \\ -12 & 11 & -22 \end{bmatrix}$

Definisi 2.11 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks dan c adalah skalar sebarang, maka ***hasil kali (product)***cAadalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari A.

Pada notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka

$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$

Contoh 2.11 Diberikan matriks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Maka

$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ dan

$(-3)A = (-3)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -12 \\ -6 & -3 & -12 \\ -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

Definisi 2.12 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = I,\ A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n\text{faktor}}(n>0) \qquad (2.3)$$

Contoh 2.12 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, tentukanlah A^3

Penyelesaian:

$A^3 = AAA$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 17 & 18 \\ 11 & 23 & 18 \\ 10 & 22 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 61 & 130 & 120 \\ 70 & 151 & 150 \\ 80 & 170 & 192 \end{bmatrix}$$

2.3 *Trace* Matriks

Definisi 2.13 (Anton dan Rorres, 2004) *Trace* sebuah matriks n×n, $A = [a_{ij}]$, didefinisikan sebagai penjumlahan setiap diagonal utama dari matriks A tersebut. Dapat ditulis sebagai berikut:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} .$$

Beberapa sifat dari *trace* matriks diantaranya adalah sebagai berikut:

1. $tr(I_n) = n$
2. $tr(kA) = k\,tr(A)$
3. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
4. $tr(A^T) = tr(A)$

Dimana k adalah sebarang skalar, sedangkan A dan B adalah matriks berukuran n×n.

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa $tr(I_n) = n$

Ambil matriks $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$$tr(I_n) = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{\text{n faktor}}$$

$= \sum_{1}^{n} 1 = n$ ∎

2. Akan dibuktikan bahwa tr(kA) = k tr(A)

Ambil sebarang matriks $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

dan skalar k

$$tr(k\,A_n) = tr\left(k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= ka_{11} + ka_{22} + ka_{33} + \cdots + ka_{nn}$$

$$= k(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn})$$

$$= k\,tr(A_n)$$ ∎

3. Akan dibuktikan bahwa tr(A+B) = tr(A) + tr(B)

Ambil sebarang matriks $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

dan $b_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

maka,

$$tr(A_n+B_n) = tr\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{2n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+a_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}\right)$$

$$= a_{11} + b_{11} + a_{22}+b_{22}+a_{33} + b_{33} + \cdots+a_{nn}+b_{nn}$$

$$= (a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn})(+b_{11}+b_{22}+b_{33}+b_{nn})$$

$$= tr(A_n) + tr(B_n)$$

4. Akan dibuktikan bahwa $tr(A^T) = tr(A)$

Ambil sebarang matriks $A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$tr(A_n^T) = tr\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^T\right)$$

$$= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

$$= \operatorname{tr}(A_n)$$ ∎

2.4 *Trace* Matriks Ketetanggaan dari Graf Lengkap Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Ada beberapa penelitian terkait dengan *trace* matriks yang akan dikaji kali ini. Diantara penelitian-penelitian tersebut yang sangat mendukung adalah penelitian oleh Muhammad Faisal pada tahun 2019 menemukan persamaan baru yang efisien untuk mencari *trace* matriks berpangkat bilangan bulat dari matriks ketetanggaan dengan graf lengkap. Penelitian ini memberikan bentuk umum perpangkatan matriks dari graf lengkap berpangkat tiga, matriks ketetanggaan dari graf lengkap, yaitu:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Matriks A_n^3 adalah

$A_n^3 = (a_{ij}), 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} (n-1)+(n-2)^2, & i \neq j \\ (n-1)(n-2) & i=j \end{cases}$$

atau

$$A_n^3 = \begin{bmatrix} (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) \end{bmatrix}, n \geq 2$$

Selanjutnya A_n^3 akan dibuktikan dalam teorema berikut:

Teorema 2.2 Diberikan A_n suatu matriks ketetanggaan dari graf lengkap pada Persamaan (2.4), maka

$$A_n^3 = \begin{bmatrix} (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) \end{bmatrix}, n \geq 2$$

Bukti:

$A_n^3 = A_n . A_n . A_n$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
\underbrace{0+1+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{0+0+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{0+1+0+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{0+1+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{0+1+1+\cdots+1+0+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{0+1+1+\cdots+1+1+0}_{n\text{ faktor}} \\
\underbrace{0+0+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+0+0+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+1+0}_{n\text{ faktor}} \\
\underbrace{0+1+0+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+0+0+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+1+1}_{n\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+1+0}_{n\text{ fak2or}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\underbrace{0+1+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+0+0+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+0+1+0}_{n\text{ faktor}} \\
\underbrace{0+1+1+\cdots+1+0+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0+1}_{n\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+0+0+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+0+1}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+0+0}_{n\text{ faktor}} \\
\underbrace{0+1+1+\cdots+1+1+0}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+1+0}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+1+0}_{n\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+0+1+0}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+0+0}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1+0}_{n\text{ faktor}}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-1)\text{ faktor}} & \underbrace{1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} \\
\underbrace{1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-1)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} \\
\underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-1)\text{faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{faktor}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1+1}_{(n-1)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} \\
\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-1)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{(n-2)\text{ faktor}} \\
\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \cdots & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{(n-2)\text{ faktor}} & \underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{(n-1)\text{ faktor}}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
(n-1) & (n-2) & (n-1) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\
(n-2) & (n-1) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\
(n-2) & (n-2) & (n-1) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-1) & (n-2) & (n-2) \\
(n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-1) & (n-2) \\
(n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-1)
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\underbrace{0+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-1)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-1)+(n-2)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \cdots \\
\underbrace{0+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-1)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \cdots \\
\underbrace{0+(n-2)+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+0+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\underbrace{0+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-1)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \cdots \\
\underbrace{0+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-1)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-1)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \cdots \\
\underbrace{0+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-1)+0+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+(n-1)}_{n\text{ faktor}} & \cdots
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\cdots & \underbrace{(n-1)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-1)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-1)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+0}_{n\text{ faktor}} \\
\cdots & \underbrace{(n-2)+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+0}_{n\text{ faktor}} \\
\cdots & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-1)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-1)+\cdots+(n-2)+(n-2)+0}_{n\text{ faktor}} \\
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-1)+0+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-1)+(n-2)+0}_{n\text{ faktor}} \\
\cdots & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-1)+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-1)+0}_{n\text{ faktor}} \\
\cdots & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-2)+(n-1)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+0+(n-1)}_{n\text{ faktor}} & \underbrace{(n-2)+(n-2)+(n-2)+\cdots+(n-2)+(n-2)+0}_{n\text{ faktor}}
\end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) \\ (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & \dots & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) \\ (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)(n-2) & \dots & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & \dots & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) \\ (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & \dots & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) \\ (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & \dots & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)+(n-2)(n-2) & (n-1)(n-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & \dots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & \dots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \dots & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \dots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \dots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pembuktian diatas, maka Teorema 2.3 terbukti. ∎

Setelah mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat tiga, maka dapat disajikan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat tiga sebagai berikut.

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh

$$A_n^3 = \begin{bmatrix} (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) \end{bmatrix}$$

Maka,

$$
tr(A_n^3) = tr\begin{bmatrix}
(n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\
(n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\
(n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\
(n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \\
(n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2)
\end{bmatrix}
$$

$$
= \left[\underbrace{(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)+\cdots+(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)}_{n \text{ faktor}}\right]
$$

$$
= n((n-1)(n-2)).
$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini menggunakan metode kajian pustaka (studi literatur). Adapun langkah – langkah untuk mendapatkan *trace* matriks ketetanggaan n×n pada graf roda berpangkat tiga dalah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks ketetanggaan dari graf roda A_n pada Persamaan (1.2)
2. Membuktikan perpangkatan matriks A_n^3 dengan cara $A_n^3 = A_n . A_n . A_n$
3. Membuktikan bentuk umum $tr\left(A_n^3\right)$ dari graf roda dengan pembuktian langsung.
4. Mengaplikasikan bentuk umum $tr\left(A_n^3\right)$ dalam bentuk contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan pada Bab IV tentang *trace* matriks ketetanggaan n×n berpangkat tiga dengan matriks pada Persamaan (1.2), maka diperoleh:

1. Bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf roda berpangkat tiga yaitu:

$$(A_n^3) = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 & 5 & 4 & \cdots & 4 & 5 & 4 & 7 & (n+3) \\ 7 & 4 & 7 & 4 & 5 & \cdots & 4 & 4 & 5 & 4 & (n+3) \\ 4 & 7 & 4 & 7 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 4 & 5 & (n+3) \\ 5 & 4 & 7 & 4 & 7 & \cdots & 4 & 4 & 4 & 4 & (n+3) \\ 4 & 5 & 4 & 7 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 4 & 4 & (n+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (n+3) \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 7 & 4 & 5 & (n+3) \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 7 & 4 & (n+3) \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 4 & 7 & (n+3) \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 & 4 & 4 & (n+3) \\ (n+3) & (n+3) & (n+3) & (n+3) & (n+3) & \cdots & (n+3) & (n+3) & (n+3) & (n+3) & 2(n-1) \end{bmatrix}, n \geq 8$$

2. Bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan yaitu:

   $tr\left(A_n^3\right) = 6(n-1), n \geq 8$

5.2 Saran

Dalam pembahasan yang telah dikemukakan, penulis hanya membahas tentang langkah-langkah dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan dari graf roda berpangkat tiga. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat melanjutkan pembahasan mengenai *trace* matriks lainnya seperti matriks bersisihan dari graf roda dan sebagainya, serta penerapannya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, dan Rorres, "*Aljabar Linear Elementer versi aplikasi.*" Edisi kedelapan jilid 1, Erlangga, 2004

Aryani, dan M. Solihin, "*Trace* Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Vol 3, No. 2, Halaman. 16-23. Juli 2017.

Aryani, dan Yulianis, "*Trace* Berbentuk Khusus 2 × 2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* Vol 4, No. 2, Halaman. 105-113. Juli2018.

Muhammad Faisal, "*Trace matriks ketetanggaan dari graf Lengkap Berpangkat Negatif Tiga,*" Skripsi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim, Riau.2019.

Rosen. K. H. "*Discrete Mathematics and Its Aplication*" Sixth Edition, 2007

Munir, R. "*Matematika Diskrit*", Edisi Ketiga., Bandung, 2005.

Pahade, J,K., dan Jha. "Trace of positif integer power of real 2 × 2 Matrices," *Advance in Linear Algebra & Matrix Theory*. 5, 150-155, 2015.

Pahade, J,K., dan Jha. "Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix," *Global Jurnal of Pure and Aplied Mathematics*. Vol 13, No.6, pp. 2079-2087, 2017.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Duri pada tanggal 17 April 1996, sebagai anak kedua dari dua bersaudara pasangan Bapak Mustafa Rohimin dan Ibu Sufini (Alm) dengan 2 saudara yaitu Leily Purnama Sari. Penulis menyelesaikan Pendidikan Formal Sekolah Dasar di SDN 28 DesaPetani pada tahun 2008. Sekolah Menengah Pertama penulis selesaikan di MTS Bustanul Ulum Desa Petani pada tahun 2011 dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di MA Terpadu Duri pada tahun 2014. Setelah menyelesaikan bangku MA, pada tahun yang sama penulis melanjutkan Pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Pekanbaru Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika. Pada bulan Juli 2018, penulis melaksanakan Kerja Praktek di Dinas Ketenagakerja dan Transmigrasi di Kab. Bengkalis, dengan judul **"Peramalan Pencari Kerja di Kabupaten Bengkalis Menggunakan Metode Pemulusan Eksponensial Tunggal dan Ganda"** yang di bimbing oleh bapak Wartono, M.Sc, yang diseminarkan pada tanggal 18 Juli 2018. Pada bulan Juli- September 2018 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Kepulauan Meranti, Kecamatan Tebing Tinggi, Kelurahan Selatpanjang Selatan, Kampung Jawa. Penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana pada tanggal Januari 2021 dengan judul Tugas Akhir yaitu "*TRACE* MATRIKS KETETANGGAAN × PADA GRAF RODA BERPANGKAT TIGA" dengan dosen pembimbing Ibu Fitri Aryani, S.Si, M.Sc.